

Problème 040 – Les impressions d'Instagram – Corrigé

1) a) Calculer $u_1 = 0,9 \times u_0 = 0,9 \times 80 = 72$

$$u_2 = 0,9 \times u_1 = 0,9 \times 72 = 64,8$$

$$u_3 = 0,9 \times u_2 = 0,9 \times 64,8 = 58,32$$

$$u_4 = 0,9 \times u_3 = 0,9 \times 58,32 \approx 52,49$$

b) En suivant la logique précédente, le 5^{ème} jour, Delphine perd encore 10% par rapport au 4^{ème} jour, mais elle gagne 80 impressions grâce à la publication de sa photo. De ce fait, on a : $u_5 = 0,9 \times u_4 + 80$ donc c'est bien $u_5 = 0,9^5 \times u_0 + 80$.

2) a) Montrons que $v_{n+1} = 0,9^5 \times v_n + 80$.

On a : $v_1 = u_5 = 0,9^5 \times u_0 + 80 = 0,9^5 \times v_0 + 80$ (selon la question 1b))

On étend le même principe : $v_{n+1} = u_{5n+5} = 0,9^5 \times u_{5n} + 80 = 0,9^5 \times v_n + 80$

b) On a : $r = \frac{80}{1-0,9^5} \approx 195,35$

Initialisation :

$$v_1 = 0,9^5 \times v_0 + 80 = 0,9^5 \times 80 + 80 = 127,23$$

Donc on a bien $v_0 < v_1 < r$

Hérédité :

Supposons qu'au rang k : $v_k < v_{k+1} < r$

$$\text{Donc } 0,9^5 \times v_k < 0,9^5 \times v_{k+1} < 0,9^5 \times r$$

$$\text{Et } 0,9^5 \times v_k + 80 < 0,9^5 \times v_{k+1} + 80 < 0,9^5 \times r + 80$$

$$\text{Or } 0,9^5 \times r + 80 = 0,9^5 \times \frac{80}{1-0,9^5} + 80 = \frac{0,9^5 \times 80}{1-0,9^5} + \frac{80(1-0,9^5)}{1-0,9^5} = \frac{80}{1-0,9^5} = r$$

Donc on a bien $v_{k+1} < v_{k+2} < r$

On a donc démontré la propriété au rang $k+1$

Conclusion :

(v_n) est une suite croissante majorée par r .

c) On en déduit, d'après le théorème de convergence monotone, que la suite (v_n) converge.

3) a) On a $w_{n+1} = v_{n+1} - r$

$$\text{Donc } w_{n+1} = 0,9^5 \times v_n + 80 - r$$

$$\text{Donc } w_{n+1} = 0,9^5 \times (w_n + r) + 80 - r$$

$$w_{n+1} = 0,9^5 \times w_n + 0,9^5 r + 80 - r$$

$$w_{n+1} = 0,9^5 \times w_n + r(0,9^5 - 1) + 80$$

$$w_{n+1} = 0,9^5 \times w_n + \frac{80}{1-0,9^5} \times (0,9^5 - 1) + 80$$

$$w_{n+1} = 0,9^5 \times w_n - 80 + 80 = 0,9^5 \times w_n$$

$$\text{De plus } w_0 = v_0 - r = 80 - \frac{80}{1-0,9^5} = \frac{80(1-0,9^5)}{1-0,9^5} - \frac{80}{1-0,9^5} = -\frac{0,9^5}{1-0,9^5}$$

(w_n) est donc une suite géométrique de premier terme $w_0 = -\frac{0,9^5}{1-0,9^5}$ et de raison $q = 0,9^5$

b) On a donc : $w_n = -\frac{0,9^5}{1-0,9^5} \times (0,9^5)^n$

$$\text{Ainsi } v_n = -\frac{0,9^5}{1-0,9^5} \times (0,9^5)^n + \frac{80}{1-0,9^5} = \frac{1}{1-0,9^5} (80 - (0,9^5)^{n+1})$$

c) On a $0,9^5 < 1$

Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} (0,9^5)^n = 0$

Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} 80 - (0,9^5)^n = 80$

Et $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \frac{80}{1-0,9^5} = r$.

d) r est la limite que Delphine qu'elle recherche quand chaque fois qu'elle publiera, donc tous les 5 jours. Toutefois, le jour suivant une publication, le nombre d'impressions chute de 10% et ainsi de suite pendant 4 jours, ce qui veut dire que u_n ne converge pas vers r (en langage mathématique : $\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n > N$ tel que $|u_n - r| > \varepsilon$. Il suffit de prendre $\varepsilon > 1\%$, et de prendre $n = N+1$, puisque la chute est de 10%).

.